Gara di matematica a squadre

23 agosto 2024

GARA SCRITTA DA:
Alberto Cagnetta, Andrea Lavarone, Alessandro Minisini,
Thomas Scarinzi ed Eugenio Trovarelli.

Istruzioni generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare come risposta un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi come risposta la sua parte intera, salvo diversamente indicato.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000. Se invece la quantità richiesta non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si diano come risposta le ultime quattro cifre della risposta.
- I problemi sono in ordine di apparente difficoltà.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tenere conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{1} = 1.0000 \quad \sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \pi = 3.1416$$

Scadenze:
- 10 **minuti dall'inizio**: termine scelta del JOLLY;
- 105 **minuti dall'inizio**: termine della gara.

1 Cerimonia di apertura

La cerimonia di apertura dei Giochi Olimpici prevede che tutti gli atleti sfilino sopra delle imbarcazioni lungo la Senna. I primi a sfilare sono gli atleti egiziani, chissà quando toccherà agli atleti azzurri! In generale, gli atleti presenti sono $A = (1 + 3 + \cdots + 2025) \cdot (2 + 4 + \cdots + 2024)$ e le barche sono $B = 1^3 + 2^3 + \cdots + 1012^3$. Agli organizzatori interessa sapere il valore preciso del rapporto A/B. Quanto vale tale rapporto?
[Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{\mathbf{1266}}$). Per semplicità, poniamo $N = 1012$ e quindi l'espressione richiesta diventa

$$\frac{A}{B} = \frac{(1 + 3 + \ldots + (2N + 1))(2 + 4 + \ldots + 2N)}{1^3 + \ldots + N^3}.$$

Usando le note formule per la somma dei primi N numeri pari, primi N numeri dispari e primi N cubi perfetti:

$$1 + 3 + \ldots + (2N + 1) = (N + 1)^2$$
$$2 + 4 + \ldots + 2N = 2 \cdot \frac{N(N + 1)}{2} = N(N + 1)$$
$$1^3 + 3^3 + \ldots + N^3 = \frac{N^2(N + 1)^2}{4}$$

otteniamo

$$\frac{A}{B} = \frac{4N(N + 1)^3}{N^2(N + 1)^2} = \frac{4(N + 1)}{N} \overset{N=1012}{=} \frac{1013}{253}$$

da cui la risposta 1266.

2 Portabandiera

I nostri portabandiera ai Giochi Olimpici sono Arianna Errigo e Gianmarco Tamberi. Proprio quest'ultimo, durante la cerimonia, ha perso la propria fede nuziale nella Senna mentre sventolava la bandiera italiana. Sono tuttora in corso i tentativi di recupero dell'anello da parte dei sommozzatori. Finora hanno provato a recuperare l'anello in n diverse occasioni, dove n è il più piccolo intero positivo di due cifre tale che

$$n^{2025} - n^{2024}$$

sia un quadrato perfetto. Quanti tentativi sono stati effettuati?

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{\mathbf{10}}$). L'espressione si può riscrivere come

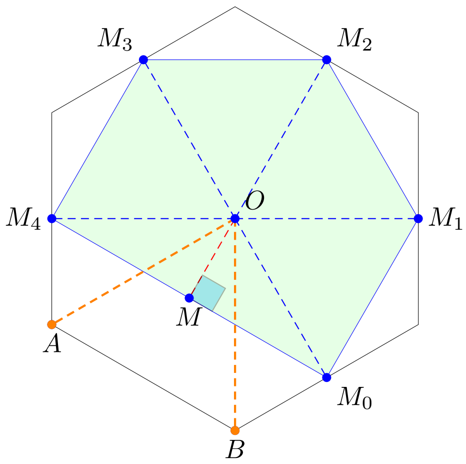
$$n^{2024}\,(n - 1)$$

Essendo n^{2024} un quadrato per ogni n intero, dobbiamo far sì che $n - 1$ sia un quadrato. Il più piccolo n di due cifre che rispetta la condizione del testo è quindi 10.

3 Medaglie, pt. I

Le medaglie di questi Giochi Olimpici hanno un design particolare. In ogni medaglia è infatti presente una decorazione a forma di esagono regolare, realizzata con ferro originale della Torre Eiffel! Inoltre, è presente una decorazione aggiuntiva: un pentagono i cui cinque vertici sono cinque dei punti medi dei lati dell'esagono. Sapendo che l'area della decorazione esagonale è 16 cm^2, qual è l'area della decorazione pentagonale, in mm^2?

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{\mathbf{1000}}$). La situazione è la seguente:



Come possiamo osservare, il poligono pentagonale considerato in realtà è formato da quattro triangoli equilateri più i due triangoli M_4MO e M_0MO, che però sommati formano un altro triangolo equilatero. Pertanto, il pentagono considerato ha area pari a $5/6$ di un esagono di lato M_0M_1.
Detto $\ell = AB$, allora abbiamo che $M_0M_1 = M_0O$ e quindi M_00 è pari all'altezza del triangolo equilatero BCO. Pertanto $\frac{M_0M_1}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e quindi, utilizzando questo rapporto di similitudine tra i due esagoni di lato AB e lato M_0M_1, abbiamo che l'area cercata è pari a

$$16 \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{16 \cdot 5 \cdot 3}{6 \cdot 4} = 10$$

da cui la risposta.

---

4 *Judo*

Alice Bellandi si sta preparando ad affrontare la sua avversaria nella finale di judo categoria 78 kg. Il *tatami* su cui gareggerà ha una forma particolare, diversa dal solito quadrato. Esso ha la forma di un poligono convesso, le cui misure (espresse in gradi) degli angoli interni formano una progressione aritmetica di ragione 4. Sapendo che il maggiore tra gli angoli interni di tale poligono misura 172°, qual è il numero di lati del *tatami*?

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{12}}$). Dato che le misure (espresse in gradi) degli angoli interni del poligono formano una progressione aritmetica di ragione 4, vale che tali angoli misurano 172°, 168°, 164°... Dunque, detto n il numero di lati del poligono, la somma delle misura degli angoli del poligono vale

$$172 + 172 - 4 + 172 - 8 + \cdots 172 - 4 \cdot (n-1) = 172n - 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 174n - 2n^2$$

Ora, per concludere il problema, ci basta ricordare che la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è $(n-2) \cdot 180°$. Dunque, eguagliando le due espressioni trovate ricaviamo che

$$174n - 2n^2 = (n-2) \cdot 180$$

Le due soluzioni sono $n = -15$ e $n = 12$, per cui la risposta è $n = 12$.

---

5 *Scherma*

La squadra femminile di spada formata da Rossella Fiamingo, Giulia Rizzi, Alberta Santuccio e Mara Navarria si sta preparando per la finale. In una finale di scherma a squadre sono previsti uno dopo l'altro 9 assalti e l'allenatore ha deciso che due di questi li disputerà Fiamingo, tre li disputerà Rizzi, tre li disputerà Santuccio e uno lo disputerà Navarria. Inoltre, il regolamento prevede che Navarria potrà disputare il suo assalto solamente dopo che la Fiamingo avrà terminato entrambi i suoi assalti. Sapendo che questo è l'unico vincolo imposto dal regolamento, in quanti ordini diversi potranno effettuare i 9 assalti le spadiste italiane?

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{1680}}$). Il problema può essere riformulato nella seguente maniera: "Quanti sono gli anagrammi della parola $FFRRRSSSN$ tali che la N segua entrambe le F?". Il numero totale di anagrammi di $FFRRRSSSN$ è

$$\frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 3!}$$

Ora non resta che accorgersi che un terzo di questi anagrammi conterranno la sequenza $F...F...N$, un terzo la sequenza $F...N...F$ e un terzo la sequenza $N...F...F$. Dunque, al risposta è:

$$\frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3} = 1680$$

---

6 *Nuoto, pt. I*

Thomas Ceccon non riesce proprio a dormire nel villaggio olimpico. Per questo motivo, prima della finale dei 100 metri dorso, decide di passare il tempo provando a risolvere il *quadrato magico* raffigurato a lato, in cui compaiono potenze di 4 maggiori di 1. Egli sa che il prodotto dei numeri su ogni riga, colonna e diagonale principale è costante e che in ogni casella bisogna inserire un numero diverso. Sapendo che il prodotto dei numeri sulle caselle azzurre è pari a 4^x, quanto vale x?

4^{16}			4^{13}
	4^{11}		
4^{9}		4^{6}	
			4^{1}

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{34}}$). Poniamo come $4^a, 4^b, 4^c$ i valori delle seguenti caselle:

4^{16}			4^{13}
4^{a}	4^{11}		
4^{9}	4^{b}	4^{6}	
	4^{c}		4^{1}

Notiamo che il valore costante è pari a $4^{16+11+6+1} = 4^{34}$. Allora, possiamo calcolare il valore delle caselle mancanti:

4^{16}	4^{23-b-c}		4^{13}
4^{a}	4^{11}		4^{b+1}
4^{9}	4^{b}	4^{6}	4^{19-b}
4^{9-a}	4^{c}	4^{24+a-c}	4^{1}

Possiamo ora usare il valore della casella bianca rimanente per impostare una equazione, imponendo che il valore ottenuto usando l'ipotesi iniziale attraverso la diagonale e la seconda riga orizzontale, sia lo stesso (ci basta considerare gli esponenti):

$$34 - (a + 11 + b + 1) = 34 - (9 - a + b + 13)$$

da cui $a + b + 12 = 9 - a + b + 13$, ossia $a = 5$. Pertanto:

4^{16}	4^{23-b-c}		4^{13}
4^{5}	4^{11}	4^{17-b}	4^{b+1}
4^{9}	4^{b}	4^{6}	4^{19-b}
4^{4}	4^{c}	4^{29-c}	4^{1}

Ripetendo lo stesso procedimento utilizzando la prima riga e la terza colonna rispetto alla casella mancante, otteniamo

$$34-(-16-23+b+c-13)=34-(-17+b-6-29+c)$$

che è una identità. Questo vuol dire che b, c sono "forzati" solo dal fatto che tutti gli esponenti del quadrato sono differenti.

4^{16}	4^{23-b-c}	4^{b+c-18}	4^{13}
4^{5}	4^{11}	4^{17-b}	4^{b+1}
4^{9}	4^{b}	4^{6}	4^{19-b}
4^{4}	4^{c}	4^{29-c}	4^{1}

In particolare, otteniamo che $b+c>18$ e anzi $b+c\geq 20$, in quanto l'esponente 1 è già utilizzato. Inoltre $b<17$, anzi $b\leq 15$ visto che $17-b$ non può essere uguale a 1. Infine $b+c<23$, ossia $b+c\leq 22$. Inoltre $c\geq 20-c\geq 20-15=5$. A questo punto è possibile escludere alcuni valori restanti per b, vedendo gli esponenti già utilizzati: $16, 5, 9, 4, 6, 1, 11, 13$, da cui si ottiene che $b, b+1, 19-b, 17-b$ devono essere diversi da questi valori. Ciò porta a concludere che b è ≤ 15 e diverso da

$$\begin{aligned} b+1:&\ \ b\neq 15,4,8,3,5,10,12 \\ 19-b:&\ \ b\neq 3,14,10,15,13,18,8,6 \\ 17-b:&\ \ b\neq 5,16,12,17,15,20,10,8 \end{aligned}$$

e pertanto gli unici valori possibili per b sono $2, 7$. Si ottiene:

$\boldsymbol{b=2}$

4^{16}	4^{20-c}	4^{c-16}	4^{13}
4^{5}	4^{11}	4^{15}	4^{3}
4^{9}	4^{2}	4^{6}	4^{17}
4^{4}	4^{c}	4^{29-c}	4^{1}

$\boldsymbol{b=7}$

4^{16}	4^{16-c}	4^{c-11}	4^{13}
4^{5}	4^{11}	4^{10}	4^{8}
4^{9}	4^{7}	4^{6}	4^{12}
4^{4}	4^{c}	4^{29-c}	4^{1}

Per $b=2$, dobbiamo avere che $17\leq c\leq 19$ ma $20-c\neq 1$ e $20-c\neq 2$ e $c-16\neq 1$ e quindi non ci sono soluzioni.
Per $b=7$, abbiamo $12\leq c\leq 15$ e $16-c\neq 4, 1$ e $c-11\neq 4, 1$, ossia $c\neq 12, 15$. Inoltre $c\neq 13$ (l'esponente è già usato) e rimane quindi $c=14$ che effettivamente è soluzione. La risposta è pertanto $x=5+14+12+(14-11)=34$.

7 Tiro con l'arco

Un bersaglio di tiro con l'arco è composto da 10 cerchi concentrici di diametro 1, 2, ..., 10 cm dal valore rispettivamente di 10, 9, ..., 1 punti. In questo momento, Mauro Nespoli sta per scoccare l'ultima freccia della gara. Sapendo che sicuramente non mancherà il bersaglio e che ogni punto del bersaglio ha la stessa probabilità di essere colpito, qual è la probabilità che l'arciere ottenga un punteggio dispari?
[Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

Soluzione (***Risposta:* 31**). Per risolvere questo problema bisogna ricordare che, detto x il rapporto tra i raggi di due circonferenze, vale che il rapporto tra le aree dei due cerchi è x^2.
Detta A l'area del cerchio di diametro 1 cm, che vale 10 punti, vale quindi che l'area della porzione di bersaglio che vale 9 punti è $4A - A = 3A$. Iterando questo ragionamento, si ricava che l'area della porzione di bersaglio che vale $10 - i$ punti è $(2i + 1)A$. La probabilità che l'arciere ottenga un punteggio dispari è dunque

$$\frac{3A + 7A + 11A + 15A + 19A}{100A} = \frac{11}{20} \tag{1}$$

da cui la risposta, $11 + 20 = 31$.

---

8 Ciclismo su pista

L'americana è una specialità del ciclismo su pista, che prevede vengano effettuate esattamente 2024 volate. In particolare, l'n-ima volata (con $1 \leq n \leq 2024$) mette in palio una quantità di punti pari al resto della divisione per 13 di $25^n + 9^n$. Le due cicliste italiane, Chiara Consonni e Vittoria Guazzini, notano quindi che ci sono alcune volate che non mettono in palio alcun punto! Quante sono le volate che non assegnano punti?

Soluzione (***Risposta:* $\boxed{\textbf{337}}$**). Il problema equivale a trovare gli n per cui $25^n + 9^n \equiv_{13} 0$. Notiamo che $25 \equiv_{13} -1$ e quindi

$$25^n \equiv_{13} \begin{cases} 1 \text{ se } n \text{ è pari} \\ -1 \text{ se } n \text{ è dispari} \end{cases}.$$

Per il piccolo teorema di Fermat, si ha che $9^{13-1} = 9^{12} \equiv_{13} 1$ quindi sicuramente le potenze di 9 ciclano con periodo al più 12 (e il periodo divide 12). Notiamo che $9^2 = 81 \equiv_{13} 3$ e quindi $9^3 \equiv_{13} 3 \cdot 9 = 27 \equiv_{13} 1$, da cui otteniamo che le potenze di 9 ciclano con periodo 3. Precisamente

$$9^n \equiv_{13} \begin{cases} 1 \text{ se } n \equiv_3 0 \\ 9 \text{ se } n \equiv_3 1 \\ 3 \text{ se } n \equiv_3 2 \end{cases}.$$

Confrontando i risultati ottenuti, si ottiene che l'unica possibilità affinché $25^n + 9^n \equiv_{13} 0$ è che $25^n \equiv_{13} -1$ e $9^n \equiv_{13} 1$, ossia

$$\begin{cases} n \equiv_2 1 \\ n \equiv_3 0 \end{cases}$$

e quindi $n = 3 + 6k$. I numeri cercati sono i numeri con resto 3 se divisi per 6; visto che $2024 = 2 + 2022 = 2 + 6 \cdot 337$, la risposta è $2022/6 = 337$.

---

9 Tennis

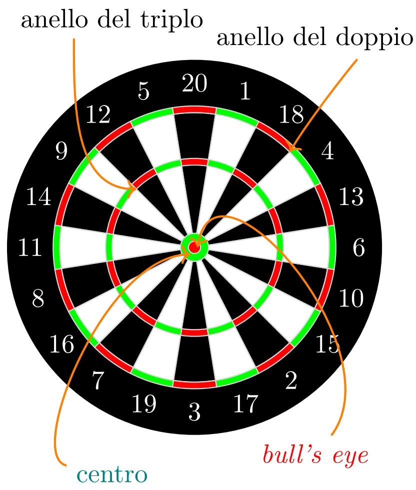
La coppia di tenniste italiane Jasmine Paolini e Sara Errani sta giocando la finale del doppio femminile di tennis. Il punteggio del *tiebreak* in corso è di $6 - 6$, per cui si andrà ai vantaggi. Dunque, quello che è successo fino a questo momento nel corso della partita non è importante: quello che conta è che la prima coppia che sarà in vantaggio di due punti sulla coppia avversaria vincerà il *tiebreak*. Sapendo che ogni punto, indipendentemente dai precedenti, viene vinto dalla coppia di tenniste italiane con una probabilità di $3/5$, qual è la probabilità che siano proprio loro a vincere il *tiebreak*?
[Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

Soluzione (***Risposta:* $\boxed{\textbf{22}}$**). Sia p la probabilità che Jasmine Paolini e Sara Errani vincano la partita e sia $q = \frac{3}{5}$ la probabilità che vincano un singolo punto giocato. Si ricava quindi che

$$p = q^2 + q(1-q)p + (1-q)qp \Longrightarrow p = \frac{q^2}{1 - 2q(1-q)}.$$

Ora ci basta sostituire $q = \frac{3}{5}$ per ricavare $p = \frac{9}{13}$.

10 Freccette



Yusuf Dikeç, annoiato dalla facilità delle gare di pistola ad aria, decide di cimentarsi nelle freccette. Il bersaglio delle freccette è diviso in 20 settori, che portano al giocatore un punteggio da 1 a 20 quando centrati. Inoltre, sono presenti due anelli, detti *anello del doppio* e *anello del triplo*, che raddoppiano e triplicano rispettivamente il punteggio di quel settore (ad esempio, la porzione di anello del triplo nel settore 19 dà 57 punti). Inoltre, c'è il centro del bersaglio, che dà diritto a 25 punti, e il centro pieno del bersaglio (anche detto *bull's eye*), che dà diritto al doppio dei punti, 50. In una partita di freccette, ciascun giocatore parte da un certo punteggio a cui si sottraggono, di volta in volta, i punteggi ottenuti con i propri lanci, fino ad arrivare a esattamente 0. Inoltre, per vincere, il tiro che fa arrivare a 0 deve essere un tiro "doppio": deve quindi centrare o l'anello del doppio o il centro pieno del bersaglio. A ogni round si lanciano tre freccette. Dikeç sta per iniziare il proprio round e il suo punteggio in questo momento è $x > 0$. Egli si accorge che, lanciando opportunamente le tre freccette (eventualmente anche fuori dal bersaglio), può arrivare esattamente a 0 e vincere, concludendo quindi con un tiro "doppio". Quanti sono i diversi valori di x permettono a Dikec di vincere la partita in questo turno?

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{\textbf{162}}$). Si può riformulare il problema in questo modo: "quanti sono i valori x che si possono scrivere come somma di tre punteggi ottenibili dal tiro con le freccette, in cui l'ultimo punteggio è un tiro doppio?"
Notiamo subito che il massimo punteggio ottenibile è 170, in cui nei primi due tiri si prende il triplo di 20, e nell'ultimo 50. Quindi la risposta finale è minore di 170. Possiamo poi notare che 169 e 168 non si possono ottenere con tre freccette, mentre 167 si può ottenere come $57 + 60 + 50$. Neanche 166 e 165 si possono ottenere, mentre 164 si può ottenere come $54 + 60 + 50$. Allo stesso modo, non si possono ottenere 163 e 162 e 159, mentre $161 = 51 + 60 + 50$ e $160 = 60 + 50 + 50$ sì. Ora, possiamo notare che tutti i punteggio da 158 a 2 sono ottenibili nei seguenti modi:

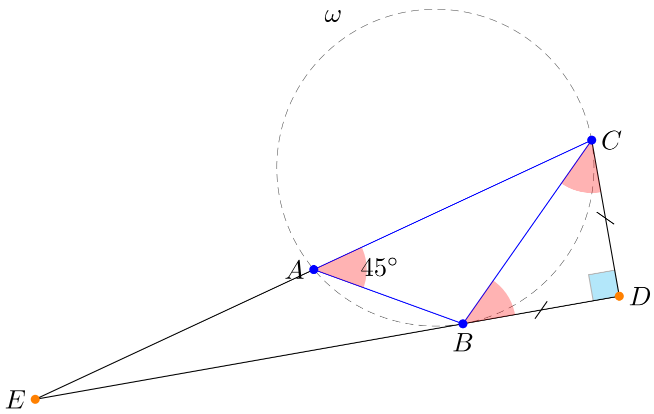
- $158 = 60 + 60 + 19 \cdot 2$
- $157 = 60 + 57 + 20 \cdot 2$
- $156 = 60 + 60 + 18 \cdot 2$
- $155 = 60 + 57 + 19 \cdot 2$
- ...
- $2 = 0 + 0 + 2$

L'idea alla base di questo ragionamento è che, ora che non serve più considerare il centro per "chiudere" il punteggio, basta aggiustare i tiri tripli e i tiri doppi per spostare di 1 il punteggio ottenibile (ad esempio aumentando di $1 \cdot 3$ un tiro triplo e diminuendo di $1 \cdot 2$ un tiro doppio). Infine, dobbiamo accorgerci che 1 non è un punteggio realizzabile.
Dunque, i punteggi realizzabili sono tutti gli interi da 2 a 170, esclusi 169, 168, 166, 165, 163, 162 e 159, per un totale di 162 punteggi possibili.

11 Atletica

Alla gara di salto con l'asta, Armand Duplantis è riuscito a saltare 6.25 metri, il nuovo record del mondo! Il trucco che gli permette di saltare così in alto è innanzitutto quello di tenere l'asta in modo che formi col terreno un triangolo ABC con $AB < BC$ e $\widehat{BAC} = 45°$. Egli chiama poi ω la circonferenza circoscritta ad ABC, D l'intersezione tra le due tangenti a ω in B e C rispettivamente ed E l'intersezione tra BD e AC. Infine, fa in modo che $AE = 13\ m$ e $AC = 7\ m$. Quanto vale l'area del triangolo CDE, in m^2?

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{\textbf{35}}$). La situazione è la seguente:



Notiamo che, per costruzione, anche $\widehat{DCB} = \widehat{CBD} = \widehat{CAB} = 45°$ in quanto angoli che insistono sull'arco BC. Da ciò deduciamo che BCD è un triangolo isoscele con angoli di 45°, quindi metà triangolo e l'angolo in D è retto. Pertanto l'area di CDE è pari a $\frac{CD \cdot ED}{2}$.
Siano $CD = DB = x$ e $EB = y$. Il nostro scopo è calcolare $CD \cdot ED = x(x + y)$. Per il teorema della secante e della tangente, abbiamo che $y^2 = EB^2 = EA \cdot EC = 260$. Inoltre, per il teorema di Pitagora, abbiamo che $CD^2 + ED^2 = EC^2$, da cui

$$x^2 + (x + y)^2 = 400, \quad \to x^2 + x^2 + 2xy + \overbrace{260}^{=y^2} = 400,$$

ossia $x(x + y) = \frac{400-260}{2} = 70$ e quindi l'area cercata è 35.

---

12 *MEDAGLIE DI LEGNO...*

Purtroppo, la spedizione italiana ai Giochi Olimpici ha raccolto un numero esorbitante di medaglie di legno! Esse sono state tante quante gli interi palindromi di quattro cifre $\overline{abba}$ divisibili per $\overline{bb}$. Quante medaglie di legno ha raccolto la spedizione italiana?

*Soluzione (**Risposta:** $\boxed{\textbf{31}}$).* Notiamo che

$$\overline{bb}|\overline{abba} \implies \overline{bb}|\overline{a00a} \implies 11b|a \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \implies b|7a$$

dove l'ultimo passaggio è vero in quanto $b < 10$ e 13 è primo. Ora, suddividendo più casi a seconda del valore di b, si ricava che la risposta è $9 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 9 + 1 + 1 = 31$.

---

13 *VELA*

Ruggero Tita e Caterina Banti si stanno preparando prima di partire per l'ultima regata della gara di vela. Il percorso prevede il posizionamento di 42 boe B_1, B_2, ..., B_{42} in linea retta, in modo tale che la distanza tra B_i e B_{i+1} sia $1/i$, dove $1 \leq i \leq 41$. Qual è la somma delle distanze tra ogni coppia di boe?

*Soluzione (**Risposta:** $\boxed{\textbf{861}}$).* Chiamiamo $D_{n,m}$ il segmento che ha per estremi i punti P_n e P_m. Contiamo quindi in maniera "furba" ciò che ci sta chiedendo il problema:

- La distanza $D_{1,2} = 1$ è contata $1 \cdot 41$ volte (una volta per ogni coppia di punti che include $D_{1,2}$).
- La distanza $D_{2,3} = 1/2$ è contata $2 \cdot 40$ volte (ogni coppia di punti che include $D_{2,3}$).
- ...
- La distanza $D_{41,42} = 1/41$ è contata $41 \cdot 1$ volte (ogni coppia di punti che include $D_{41,42}$).

La somma delle distanze vale quindi

$$\frac{1}{1} \cdot 1 \cdot 41 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 + \cdots + \frac{1}{41} \cdot 41 \cdot 1 = 1 + 2 + ... + 41 = \frac{41 \cdot 42}{2} = 861$$

La risposta è quindi 861.

---

14 Ginnastica artistica

Alice D'Amato ha appena finito di eseguire il suo esercizio alla trave. Ora, tre giudici valuteranno l'esercizio tramite tre voti x, y, z reali positivi. Successivamente, il voto finale verrà calcolato tramite la funzione $f(x,y,z) = 1000 \cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz}$. L'atleta italiana non ci mette molto a capire che, qualsiasi siano i voti dei tre giudici, il voto finale sarà sicuramente maggiore o uguale a K. Quanto vale K?

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{1414}}$). Applichiamo la disuguaglianza di QM-GM alle coppie $\left(x, \frac{y}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(z, \frac{y}{\sqrt{2}}\right)$, ottenendo

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{y^2}{2}\right)} \geq \sqrt{\frac{xy}{\sqrt{2}}}, \quad \sqrt{\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{y^2}{2}\right)} \geq \sqrt{\frac{zy}{\sqrt{2}}}$$

da cui, elevando al quadrato,

$$x^2+\frac{y^2}{2} \geq \sqrt{2}xy, \quad z^2+\frac{y^2}{2} \geq \sqrt{2}zy.$$

Sommando le due disequazioni membro a membro si ottiene

$$x^2+y^2+z^2 \geq \sqrt{2}(xy+yz)$$

e quindi

$$f(x,y,z) = 1000 \cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz} \geq 1000\sqrt{2} \simeq 1414,2...$$

da cui la risposta.
NB: non serve necessariamente usare QM-GM, in quanto in realtà basta applicare la classica disuguaglianza AM-GM alle coppie $\left(x^2, \frac{y^2}{2}\right), \left(z^2, \frac{y^2}{2}\right)$.

---

15 Pallavolo

Quest'anno il torneo olimpico di pallavolo femminile prevede la partecipazione di 32 squadre e si svolge nella seguente maniera: le squadre vengono accoppiate in modo casuale e, per ogni coppia, la squadra che perde viene eliminata dalla competizione. Le 16 squadre rimanenti vengono accoppiate in modo casuale, e così via, finché non rimane una sola squadra, che viene decretata vincitrice. L'altezza delle pallavoliste è fondamentale: si sa infatti che in qualsiasi partita vince la squadra che, tra le due, ha un'altezza media maggiore. Sapendo che l'Italia è la terza squadra per altezza media (e che ogni squadra ha un'altezza media diversa), qual è la probabilità che arrivi almeno in semifinale?
[Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{247}}$). Quanto descritto nel testo equivale al creare un normale tabellone a eliminazione con 32 squadre. Dunque, vogliamo calcolare la probabilità che le due squadre mediamente più alte non vengano sorteggiate nello stesso quarto dell'Italia. Questa probabilità vale $\frac{24}{31} \cdot \frac{23}{30} = \frac{92}{155}$, da cui la risposta.

---

16 Tiro skeet

Diana Bacosi e Gabriele Rossetti stanno disputando la finale dello skeet misto. Il piattello che devono colpire può compiere due traiettorie, che sono ben approssimate dai polinomi $p(x) = x^2 - 2024x + 1$ e $q(x) = x^2 - 2030x + 1$. Siano (x_1, x_2) e (y_1, y_2) le due coppie di radici di $p(x)$ e $q(x)$ rispettivamente. Sembra che sapere il valore dell'espressione $(x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)(x_2 - y_2)$ possa aiutare a colpire i piattelli con più precisione. Quanto vale tale espressione?

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{0036}}$). Notiamo che $q(x) = p(x) - 6x$. Visto che $q(x)$ è monico e, per definizione di (y_1, y_2), abbiamo che $q(x) = (x - y_1)(x - y_2)$, l'espressione data si può rileggere come $q(x_1)q(x_2)$. Ma $p(x_1) = p(x_2) = 0$, per definizione di x_1, x_2 e allora

$$(x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)(x_2 - y_2) = q(x_1)q(x_2) = (p(x_1) - 6x_1)(p(x_2) - 6x_2) = 36x_1x_2$$

e quindi la risposta cercata è 36 ($x_1x_2 = 1$).

---

17 Canoa slalom

Nella canoa slalom ci sono due tipi di porte: le porte verdi vanno oltrepassate nel senso della corrente, mentre le porte rosse vanno oltrepassate controcorrente. Nella fase di studio del percorso, Giovanni De Gennaro ha notato che, detto $x > 0$ il numero di porte verdi e $y > 0$ il numero di porte rosse, vale che $(x - y + 2)(x - y - 2) = -(x - 2)(y - 2)$. Sapendo che le porte verdi sono almeno tante quante lo porte rosse, quante sono le porte in totale?
[Dare come risposta la somma dei possibili risultati.]

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{14}$). Svolgendo l'espressione del testo, si ottiene $x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y = 0$. Moltiplicando tutto per 2 e aggiungendo ambo i membri 8 l'uguaglianza può essere riscritta come

$$(x - y)^2 + (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$$

Dunque, l'unica possibilità, essendo x, y interi, è che due dei tre quadrati valgano 4 e l'altro 0. Dunque:

- Se $x - y = 0$, vale che $x = y = 4$ oppure $x = y = 0$.
- Se $x - 2 = 0$, vale che $x = 2$, $y = 4$ oppure $x = 2$, $y = 0$.
- Se $y - 2 = 0$, vale che $x = 4$, $y = 2$ oppure $x = 0$, $y = 2$.

Per le condizioni del testo le uniche soluzioni accettabili sono $(x, y) = (4, 4), (4, 2)$, per cui la risposta è $8 + 6 = 14$.

---

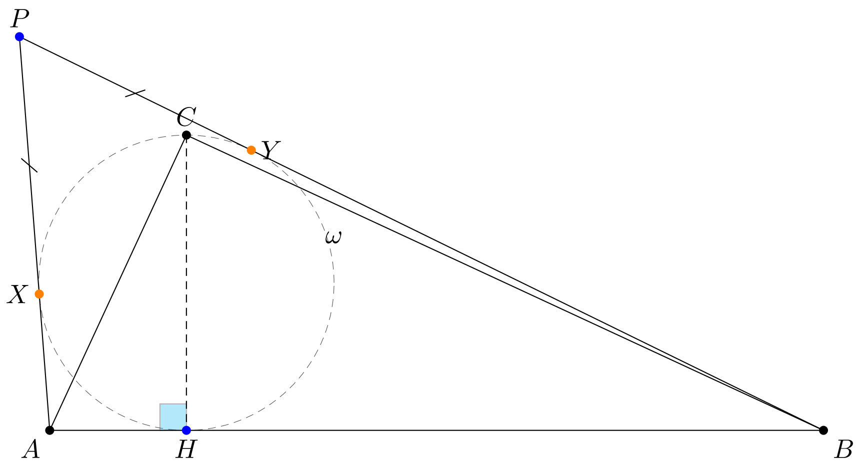
18 VELA WINDSURF

Il percorso che Marta Maggetti dovrà affrontare nella finale di windsurf è piuttosto complesso. Esso si costruisce a partire da un triangolo ABC rettangolo in C, di lati $AC = 48$ *km* e $BC = 189$ *km*. Bisogna poi considerare la proiezione H di C su AB e la circonferenza ω di diametro CH. Infine, vanno tracciate le rette tangenti a ω uscenti da A e B (diverse dalla retta AB) e la loro intersezione P. Il percorso previsto dalla gara segue il perimetro del triangolo ABP. Quanti *km* misura tale percorso?

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{520}$). Notiamo che $AC = 48 = 3 \cdot 16, BC = 189 = 3 \cdot 63$, da cui

$$AB = 3\sqrt{16^2 + 63^2} = 3\sqrt{4225} = 3\sqrt{25 \cdot 169} = 195.$$

La situazione è la seguente:



Indichiamo con X, Y (evidenziati in arancio nella figura) rispettivamente i punti di tangenza tra PA, PB con ω. Notiamo che ω, per costruzione, è la circonferenza inscritta in ABP e il suo raggio è pari alla metà dell'altezza CH. Risolviamo il problema in generale, quindi con $AB = c, BC = a, CA = b$ (in particolare $a^2 + b^2 = c^2$). Allora, visto che ABC è rettangolo, abbiamo che $CH = \frac{ab}{c}$ e quindi il raggio di ω è pari a $\frac{ab}{2c}$.
Poniamo $x = PX$. Per note proprietà dei segmenti di tangenza, abbiamo che $PX = PY, AX = AH, BY = BH$ e quindi il perimetro di ABP è pari a

$$AP + PB + AB = AX + XP + PY + YB + BH + HA = 2PX + 2(AH + BH) = 2PX + 2AB = 2(x + c).$$

D'altro canto, visto che CH è altezza, per il secondo teorema di Euclide si ottiene facilmente che

$$AH = \frac{b^2}{c}, \quad BH = \frac{a^2}{c}.$$

Ricordando la formula $\frac{\mathcal{A}}{p} = r$, che permette di calcolare il raggio del cerchio inscritto in un triangolo di area $\mathcal{A}$ e semiperimetro p, possiamo usare Erone per calcolare l'area di ABP e ottenere così una equazione in x.
Abbiamo quindi che $p = x + c$ e

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p - AB)(p - AP)(p - BP)} = \sqrt{(c + x)(c + x - c)\left(c + x - x - \frac{a^2}{c}\right)\left(c + x - x - \frac{b^2}{c}\right)} = \sqrt{x(c + x)\frac{a^2b^2}{c^2}}.$$

In conclusione otteniamo

$$x(c+x)\frac{a^2b^2}{c^2} = \mathcal{A}^2 = p^2r^2 = (x+c)^2\frac{a^2b^2}{4c^2}$$

da cui $x = (c+x)/4$ e quindi $x = c/3$. Allora il perimetro cercato è pari a

$$2(c+x) = \frac{8}{3}c \overset{c=195}{=} 520$$

e questa è la risposta.

---

19 *Nuoto, pt. II*

Per allenarsi per la finale dei 100 metri rana, Nicolò Martinenghi decide di nuotare a vasche giovedì, b vasche venerdì e c vasche sabato (dove $a < b < c$ sono interi positivi), in modo tale che il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 2024 \\ y = |x-a| + |x-b| + |x-c| \end{cases}$$

abbia una unica soluzione. Quante vasche avrà nuotato in totale al massimo?

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{3034}$). Per simmetria, supponiamo che $a \leq b \leq c$. Ricordiamo che la funzione $f(x) = |x+k|$, con $k \in \mathbb{R}$ numero reale qualunque, è convessa*. Inoltre, somma di funzioni convesse è convessa e pertanto l'espressione

$$g(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c|$$

è anch'essa convessa. Il grafico di $g(x)$ è una "spezzata", formata da segmenti e rette, con punti "angolosi" in corrispondenza di $x = a, b, c$.

Allora, se il sistema indicato ha un'unica soluzione, l'unica possibilità è che la retta $2x + y$ intersechi il grafico di $g(x)$ in un solo punto e questo è possibile, data la convessità di $g(x)$, solo in corrispondenza dei suoi punti angolosi, quindi per $x = a, b, c$.

Notiamo che la pendenza del grafico di $g(x)$ per $x \leq a$ è data da

$$g(x) = (a-x) + (b-x) + (c-x) = a + b + c - 3x$$

mentre per $a \leq x \leq b$ è data da $(x-a) + (b-x) + (c-x) = c + b - a - x$. La retta $y = 2024 - 2x$ ha pendenza -2, quindi "più ripida" di $c + b - a - x$ e pertanto l'unico punto angoloso in cui $y = 2024 - 2x$ può intersecare il grafico di $g(x)$ è $x = a$. Allora il sistema, sostituendo y da un'equazione all'altra, diventa

$$2024 - 2a = y = (a-a) + (b-a) + (c-a) = b + c - 2a,$$

ossia $b + c = 2024$. Ricordiamo che $a < b < c$ e quindi, visto che $a + b + c = a + 2024$ è la quantità da massimizzare, vogliamo massimizzare a. Visto che $a < b$, il valore massimo cercato sarà pari a $b - 1$, con b massimo possibile. Visto che $b + c = 2024$ e $b < c$, il valore massimo possibile per b è $2024/2 - 1 = 1011$ (e $c = 1013$), per cui $a \leq 1010$. Allora il valore massimo di $a + b + c$ è $1010 + 2024 = 3034$.

---

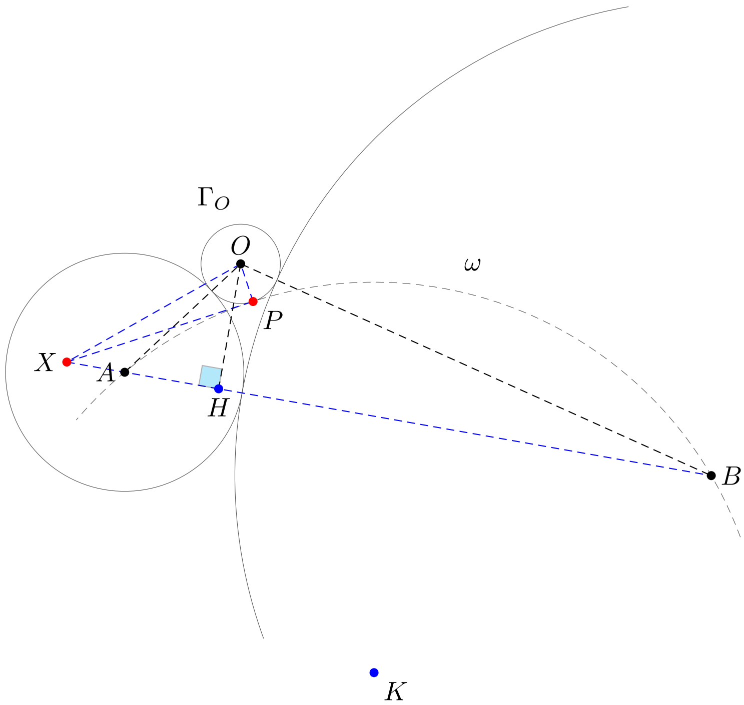
20 *Medaglie, pt. II*

Le medaglie d'oro, d'argento e di bronzo di queste olimpiadi sono leggermente diverse tra di loro: nonostante siano tutte perfettamente circolari, possiedono dei raggi diversi tra loro, che misurano rispettivamente 1, 3 e 12 *cm*. Le tre medaglie possono essere posizionate sul piano in maniera che siano a due a due tangenti. Detti O, A e B i centri delle tre medaglie (rispettivamente d'oro, d'argento e di bronzo), si consideri una quarta circonferenza ω passante per A, B e tangente alla medaglia d'oro. Detto P il punto di tangenza tra ω e la medaglia d'oro, quanto vale $\left(\frac{PA}{PB}\right)^2$?

[Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{61}$). La situazione è la seguente:

*Ossia, informalmente il suo grafico "sorride", mentre più formalmente vuol dire che preso un segmento con estremi sul grafico di $f(x)$, tale segmento si trova interamente sopra il grafico di $f(x)$



Sia K il centro di ω e sia Γ_O la circonferenza di centro O e passante per P (di raggio 1). Siano inoltre

- X l'intersezione tra la tangente a Γ_O in P e la retta AB;
- H la proiezione di O su AB.

Cerchiamo di riscrivere la tesi del problema. Come nella dimostrazione del teorema della secante e della tangente (rispetto a ω), XAP e XPB sono simili e quindi $\frac{XA}{AP} = \frac{XP}{PB}$ e $XP^2 = XA \cdot XB$. Pertanto

$$\left(\frac{PA}{PB}\right)^2 = \left(\frac{XA}{XP}\right)^2 = \frac{XA^2}{XP^2} = \frac{XA^2}{XA \cdot XB} = \frac{XA}{XB}.$$

Ci rimane da calcolare XA e XB. Notiamo che XP è l'asse radicale di ω e Γ_O, quindi vale che $XA \cdot XB = XP^2 = XO^2 - PO^2$. Sia $XA = x$.
Notiamo che $XB = XA + AB = x + 3 + 12 = x + 15$, mentre, per il teorema di Pitagora, si ha che

$$XO^2 = XH^2 + HO^2 = (x + AH)^2 + OH^2.$$

Conosciamo tutti i lati di ABO e pertanto possiamo calcolare AH, OH. Abbiamo $AO = 4, AB = 15, OB = 13$ e per la formula di Erone l'area del triangolo è pari a ($p = \frac{4+15+13}{2} = 16$)

$$\sqrt{16 \cdot (16-4)(16-13)(16-15)} = 24$$

e pertanto $OH = \frac{2 \cdot 24}{AB} = \frac{48}{15} = \frac{16}{5}$. Inoltre,

$$AH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \frac{12}{5}.$$

Allora otteniamo l'equazione

$$x(x+15) = XP^2 = \left(\left(x + \frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2\right) - 1^2$$

e questa equazione risolta porta a $x = \frac{25}{17}$. Allora $XB = x + 15 = \frac{280}{17}$ e quindi $\frac{XA}{XB} = \frac{5}{56}$ da cui la risposta 61.

---

21 *Breaking*

Ai Giochi Olimpici di Parigi 2024 fa il suo esordio la *break dance*. L'attenzione del pubblico è catturata dalla concorrente australiana, che esegue una coreografia "particolare". Per comprenderla, bisogna immaginare un pentagono regolare disegnato per terra con le sue cinque diagonali. Tutti i suoi lati e le sue diagonali vanno estesi all'infinito in entrambe le direzioni, dividendo il piano in diverse regioni, alcune delle quali di area infinita. La concorrente si trova al centro del pentagono e ogni secondo sceglie uno qualsiasi dei lati della regione nella quale si trova, con uguale probabilità, e lo oltrepassa. In questo modo, la concorrente raggiunge una nuova regione. Per completare la coreografia, ogni volta che la concorrente entra in una regione di area infinita esegue un *headspin*.
Dopo aver lasciato la regione centrale del pentagono, sia X il numero atteso di volte che la concorrente rientra in questa regione prima di eseguire un *headspin*. Quanto vale $\lfloor 1000X \rfloor$?

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{2000}$). Coloriamo le regioni di bianco o di nero come una scacchiera, in modo tale che la regione centrale sia nera e che due regioni che condividono un lato non siano mai dello stesso colore. La concorrente si muove alternativamente tra regione bianche e nere.
Sia ora C il numero atteso di vole che la concorrente rientra nella regione centrale, partendo dalla regione centrale, e sia E il numero aspettato di volte che la concorrente rientra nella regione centrale partendo da uno qualsiasi dei cinque triangoli ottusangoli.
Se la concorrente parte dalla regione centrale, c'è $1/3$ di possibilità che torni nella regione centrale in 2 mosse, altrimenti si muove in uno dei triangoli ottusangoli. Se la concorrente parte da un triangolo ottusangolo, ci sono $2/9$ di possibilità che si muova nel centro in 2 mosse, $5/9$ di possibilità che torni in un triangolo ottusangolo in 2 mosse, e $2/9$ di possibilità che esegua un *headspin* nelle prossime due mosse. Quindi possiamo scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} C = \frac{1}{3}(1+C) + \frac{2}{3}E \\ E = \frac{2}{9}(1+C) + \frac{5}{9}E \end{cases}$$

La risoluzione ci dà $C = 2$ e $E = 3/2$, quindi $C = x = 2$ e l'intero più vicino a $1000 \cdot 2$ è 2000, risposta al problema.

---

22 L'ACQUA DELLA SENNA

I Giochi Olimpici stanno per finire e le analisi dell'acqua della Senna dicono che non è ancora balneabile! Il depuratore ormai è stato ultimato e per metterlo in funzione serve un codice di accesso che è un intero positivo quattro cifre. Tuttavia, nessuno si ricorda quale sia tale codice... Gli organizzatori cercano disperatamente un modo per risolvere il problema e per fortuna trovano degli appunti che recitano: "Il codice di accesso è $(a-b)(c-b)$, dove a, b, c sono interi positivi che massimizzano l'espressione $\frac{abc(a+b+c)}{(a+b)^2(c+b)^2}$". A questo punto, non resta che provare tutti i codici compatibili con le informazioni ottenute. Quanti sono i codici possibili?

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{48}$). Innanzitutto cerchiamo di trovare i possibili valori di (a, b, c), dall'ipotesi che $\frac{abc(a+b+c)}{(a+b)^2(c+b)^2}$ assuma il valore massimo possibile. Consideriamo due approcci:

- METODO ALGEBRICO: posto $x = a/b$ e $y = c/b$, dividendo numeratore e denominatore per b^4 nell'espressione $\frac{abc(a+b+c)}{(a+b)^2(c+b)^2}$, si ottiene
$$\frac{abc(a+b+c)}{(a+b)^2(c+b)^2} = \frac{xy(x+1+y)}{(x+1)^2(1+y)^2} = \frac{xy(x+y+1)}{((xy)+(x+y+1))^2}$$
Pertanto, posto $A = xy$ e $B = x+y+1$, otteniamo
$$\frac{xy(x+y+1)}{((xy)+(x+y+1))^2} = \frac{AB}{(A+B)^2}$$
Quest'ultima frazione è minore od uguale ad $1/4$. Infatti, dalla disuguaglianza AM-GM si ottiene $\sqrt{AB} \leq (A+B)/2$ da cui si ottiene proprio che $AB/(A+B)^2 \leq 1/4$. L'uguaglianza nella disequazione si ottiene per $A = B$, ossia per $xy = x+y+1$. Ricordando come erano definiti x e y, questo ci porta a concludere che deve valere $ac = ab + cb + b^2$. Quindi
$$ab + cb + b^2 = ac \iff 2ab + 2cb + 2b^2 = 2ac$$
$$\Leftrightarrow a^2 + c^2 + 2ab + 2cb + 2b^2 = a^2 + 2ac + c^2 \iff (a+b)^2 + (c+b)^2 = (a+c)^2$$
Pertanto $a+b, b+c, a+c$ sono una terna pitagorica e quindi, a meno dell'ordine, deve valere che $a+b = m^2-n^2$, $b+c = 2mn$, $a+c = m^2+n^2$, per certi m, n interi positivi con $m > n$.
- METODO GEOMETRICO: dato un triangolo AB, BC, CA di lati $x = AB, y = BC, z = CA$, una sostituzione standard è porre "$x = a+b, y = b+c, z = c+a$", dove a, b, c in questo caso geometricamente corrispondono alle lunghezze dei segmenti di tangenza da ciascuno dei vertici del triangolo al cerchio inscritto nel triangolo stesso.
In questo caso, quindi $a+b$ e $c+b$ corrispondono alle lunghezze (intere) di due lati del triangolo, mentre, usando la formula di Erone per l'area, si ha che
$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}{16}} = \sqrt{\frac{2(a+b+c)\cdot 2c \cdot 2a \cdot 2b}{16}} = \sqrt{abc(a+b+c)}$$
e quindi il numeratore dell'espressione $\frac{abc(a+b+c)}{(a+b)^2(c+b)^2}$ è pari a $\mathcal{A}^2$, che è l'area al quadrato del triangolo. Per la formula trigonometrica dell'area, abbiamo che, detto β l'angolo compreso tra i lati di lunghezza $a+b, b+c$, $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sin\beta \cdot (a+b)(b+c)$ e quindi
$$\frac{abc(a+b+c)}{(a+b)^2(c+b)^2} = \frac{\mathcal{A}^2}{(a+b)^2(c+b)^2} \leq \frac{1}{4}\sin^2\beta \leq \frac{1}{4}$$

con il massimo raggiunto se e solo se $\beta = 90°$, in cui il triangolo ABC è rettangolo in B e quindi

$$(a+b)^2 + (c+b)^2 = (a+c)^2$$

da cui si conclude come prima.

In ogni caso, posto come detto $a+b = m^2 - n^2,\ b+c = 2mn,\ a+c = m^2+n^2$, per certi m, n interi positivi con $m > n$, si ottiene che

$$(a-b)(c-b) = (a+c-b-c)(c+a-b-a) = (m^2+n^2-2mn)(m^2+n^2-m^2+n^2) = 2(n(m-n))^2$$

e quindi i valori assumibili da $(a-b)(c-b)$ sono tutti e soli i quadrati perfetti moltiplicati per 2. Pertanto la risposta è pari al numero di interi di quattro cifre che sono il doppio di un quadrato perfetto. Posto $(a-b)(c-b) = 2k^2$, allora abbiamo che $1000 \leq 2k^2 < 10000$, da cui $23 \leq k \leq 70$ e quindi i valori possibili come codici sono $70 - 23 + 1 = 48$.